Associazione per l'Insegnamento della Fisica
Progetto Olimpiadi

# OLIMPIADI DI FISICA 1997

Gara Nazionale — SOLUZIONI

11 Aprile 1997

## PROBLEMA n. 1 — Tre in uno !

100 Punti

### A

La differenza di cammino ottico dei raggi, prima di introdurre la lamina (v. figura, a sinistra) è $\Delta s = a \operatorname{sen} \alpha$. Per angoli piccoli, la condizione di interferenza costruttiva (massimi di intensità sullo schermo) risulta, come noto:

$$\Delta s = a \operatorname{sen} \alpha_k \approx a\, \alpha_k = k\lambda \quad \Rightarrow \quad \alpha_k = \frac{k\lambda}{a}$$

e la posizione del $k$-simo massimo, sullo schermo a distanza $D$ risulta quindi

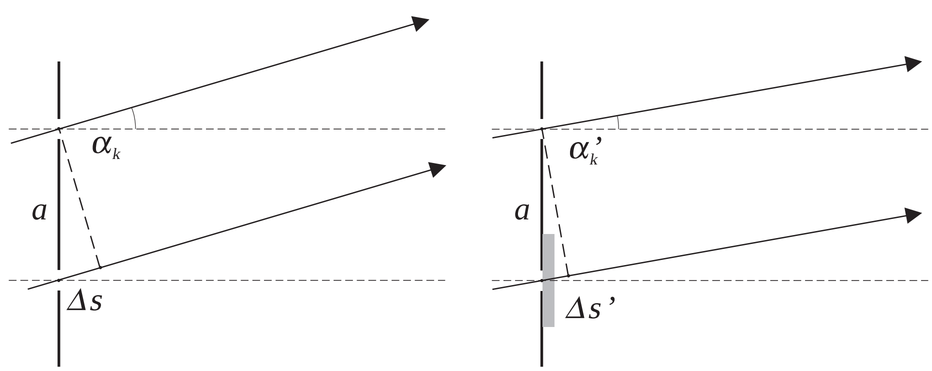
$$x_k = k\lambda\, D/a$$

avendo posto $x = 0$ nel punto in direzione perpendicolare al piano delle fenditure e dello schermo.

Dopo aver introdotto la lamina (v. figura, a destra) la differenza di cammino ottico (*) diventa

$$\Delta s' = \left( a \operatorname{sen} \alpha - \frac{d}{\cos \alpha} \right) + \frac{nd}{\cos \alpha}$$

dove il termine tra parentesi si riferisce al percorso in aria ($n \approx 1$) e l'altro al percorso entro la lamina.




Per angoli piccoli, la condizione per un massimo d'interferenza risulta ora

$$a\, \alpha_k + (n-1)\, d = k\lambda \quad \Rightarrow \quad \alpha_k = \frac{k\lambda}{a} - \frac{(n-1)\, d}{a}$$

---

(*) Ricordiamo che quando la luce attraversa un mezzo trasparente di indice di rifrazione $n$, si chiama *cammino ottico* lo spazio che la luce percorrerebbe nel vuoto nello stesso tempo; esso risulta uguale alla distanza percorsa per l'indice di rifrazione del mezzo.

Si osservi inoltre che il risultato non dipende dal fatto che la lamina sia posta subito dietro la fenditura come nell'esempio in figura.

e la posizione del $k$-simo massimo è ora

$$x'_k = \frac{k\lambda\, D}{a} - \frac{(n-1)\, dD}{a}$$

I massimi si spostano tutti di uno stesso tratto $\Delta x = x_k - x'_k = (n-1)\, dD/a$ da cui si può ricavare, con i dati del problema,

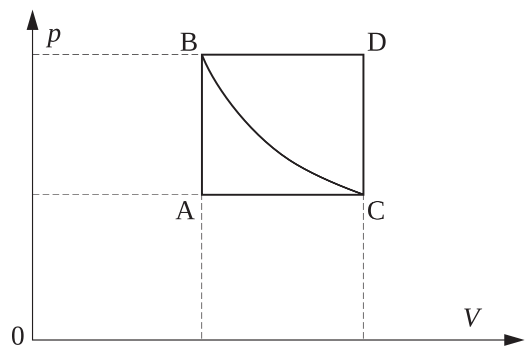
$$n = 1 + \frac{\Delta x\, a}{d\, D} = 1.539$$

L'errore di misura dello 0.35 % su $\Delta x$ si ritrova uguale nel calcolo di $n-1$; il corrispondente errore assoluto è quindi $0.0035\,(n-1) = 0.0019$; questo è anche l'errore assoluto su $n$ e di conseguenza l'errore relativo nella misura dell'indice di rifrazione risulta

$$\varepsilon_{\mathrm{r}} = \frac{0.0019}{1.54} = 0.0012 \quad \Rightarrow \quad 0.12\%$$

B

Dal grafico si deduce che le trasformazioni AB e CD sono isocore, mentre BC è una trasformazione isoterma; inoltre nelle trasformazioni AC e BD è costante il rapporto $V/T = nR/p$ per cui AC e BD rappresentano delle trasformazioni a pressione costante (isobare). Il corrispondente grafico nel piano $p-V$ risulta allora quello mostrato in figura.




Il lavoro nei due cicli corrisponde su questo grafico alle due aree in cui viene diviso il rettangolo ABCD dalla curva della trasformazione isoterma e pertanto risulta in ogni caso essere maggiore il lavoro nel ciclo BDCB rispetto a quello del ciclo ABCA.

Le temperature estreme sono dunque $T_{\mathrm{D}}$ (calda) e $T_{\mathrm{B}} = T_{\mathrm{C}}$ (fredda). Dalla relazione

$$\frac{T_{\mathrm{D}}}{T_{\mathrm{B}}} = \frac{V_{\mathrm{C}}}{V_{\mathrm{A}}} = \frac{1}{k}$$

si ricava subito

$$\eta = 1 - \frac{T_{\mathrm{B}}}{T_{\mathrm{D}}} = 1 - k$$

Gli altri dati non sono necessari.

C

La corrente nel solenoide 1 genera un campo magnetico di intensità $B_1 = \mu_0\, n_1\, i_1$, coassiale al solenoide; analogamente la corrente nel solenoide 2 genera un campo magnetico di intensità $B_2 = \mu_0\, n_2\, i_2$, coassiale al solenoide.

Considerando il solenoide 2 interno al solenoide 1 per un tratto di lunghezza $d$, il flusso del campo magnetico risultante, concatenato rispettivamente con i due solenoidi, è

$$\Phi_1 = n_1\,\ell_1\,S_1\,B_1 + n_1\,d\,S_2\,B_2$$

$$\Phi_2 = n_2\,\ell_2\,S_2\,B_2 + n_2\,d\,S_2\,B_1$$

Sostituendo l'espressione per i campi in termini delle correnti, si trova

$$\Phi_1 = \mu_0\,n_1^2\,\ell_1\,S_1\,i_1 + \mu_0\,n_1\,n_2\,d\,S_2\,i_2$$

$$\Phi_2 = \mu_0\,n_2^2\,\ell_2\,S_2\,i_2 + \mu_0\,n_1\,n_2\,d\,S_2\,i_1$$

da cui risulta $M_{12} = M_{21} = \mu_0\,n_1\,n_2\,d\,S_2$.

---

## PROBLEMA n. 2 — Sbarra su due rulli

100 Punti

### Quesito n. 1.

Si indichino con $R_\mathrm{C}$ ed $R_\mathrm{D}$ le due forze richieste. Poiché la sbarra è omogenea il baricentro è nel punto di mezzo. Le forze esercitate dai rulli sulla sbarra possono essere trovate imponendo che la forza risultante e il momento risultante di tutte le forze rispetto a qualunque punto (in particolare rispetto ad uno dei due punti di appoggio) siano nulli.

Si indichi con $x$ l'ascissa del baricentro della sbarra (dove, in condizioni di equilibrio, può essere pensato concentrata la massa) in un riferimento con origine sull'asse di simmetria del segmento CD e orientato da C a D. Usando come centro di riduzione dei momenti il punto di appoggio sul rullo di centro C, il momento della forza $R_\mathrm{C}$ sarà nullo. Indicando con $M_\mathrm{P}$ e con $M_\mathrm{D}$ rispettivamente il modulo del momento della forza peso della sbarra e quello della forza $R_\mathrm{D}$ rispetto a C, avremo:

$$M_\mathrm{P} = \left(\frac{\ell}{4} + x\right) mg = \frac{\ell + 4x}{4}\,mg$$

$$M_\mathrm{D} = R_\mathrm{D}\,\frac{\ell}{2}$$

Tenendo conto dei versi, dovrà essere $M_\mathrm{P} = M_\mathrm{D}$ e perciò:

$$R_\mathrm{D} = \frac{\ell + 4x}{2\ell}\,mg$$

La forza $R_\mathrm{C}$ può essere trovata, come detto, pensando al fatto che all'equilibrio la somma di tutte le forze agenti sulla sbarra deve essere nulla, oppure – analogamente a prima – usando come centro di riduzione l'appoggio sul rullo di centro D. Si ottiene:

$$R_\mathrm{C} = \frac{\ell - 4x}{2\ell}\,mg\,.$$

Con i dati del problema:

$$R_\mathrm{D} = \frac{9}{10}\,mg$$

$$R_\mathrm{C} = \frac{1}{10}\,mg\,.$$

**Quesito n. 2.**

Nella situazione considerata $x = -\ell/4$, per cui $R_{\mathrm{D}} = 0$, $R_{\mathrm{C}} = mg$. A causa dell'attrito fra sbarra e rullo, alla sbarra sarà applicata una forza orizzontale $F_{\mathrm{C}} = \mu R_{\mathrm{C}} = \mu mg$, che deve essere annullata dal blocco. La forza di attrito non dipende dalla velocità di rotazione dei rulli.

**Quesito n. 3.**

Appena viene tolto il blocco, la sbarra inizia a muoversi sotto l'azione della forza $F_{\mathrm{C}}$ e si sposta verso D. In questo modo la forza $R_{\mathrm{D}}$ non sarà più nulla e, per il verso di rotazione del secondo rullo, alla sbarra sarà applicata una seconda forza $F_{\mathrm{D}}$ diretta in senso contrario alla prima. Consideriamo un istante in cui il baricentro della sbarra abbia, nel riferimento già stabilito, ascissa $x$ generica. Le componenti delle forze lungo l'asse $x$ (positivo verso destra) saranno:

$$F_{\mathrm{C}} = \mu\, R_{\mathrm{C}} = \mu\, \frac{\ell - 4x}{2\ell}\, mg$$

$$F_{\mathrm{D}} = -\mu\, R_{\mathrm{D}} = -\mu\, \frac{\ell + 4x}{2\ell}\, mg$$

La risultante delle forze agenti sulla sbarra sarà:

$$F(x) = -\mu\, \frac{4x}{\ell}\, mg\,.$$

Questa forza è di tipo elastico, $F = -kx$, con costante $k = (4\mu mg/\ell)$.

La sbarra dovrà allora muoversi di moto armonico e il periodo sarà

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{4\mu g}} = \pi\sqrt{\frac{\ell}{\mu g}}$$

che risulta indipenden

**Quesito n. 5.**

Durante la rotazione ciascun rullo viene frenato da una forza tangente uguale alla forza d'attrito. Tale forza compie un lavoro negativo che deve essere compensato dal motore.

La potenza istantanea necessaria a mantenere la rotazione del rullo C è

$$W_{\mathrm{C}} = \mu R_{\mathrm{C}} \omega r$$

e quella relativa al rullo D è

$$W_{\mathrm{D}} = \mu R_{\mathrm{D}} \omega r \, .$$

La potenza complessiva, che il motore deve fornire è

$$W = W_{\mathrm{C}} + W_{\mathrm{D}} = \mu \omega r \, (R_{\mathrm{C}} + R_{\mathrm{D}}) \, .$$

Per quanto detto prima, $R_{\mathrm{C}} + R_{\mathrm{D}} = mg$, per cui

$$W = \mu \, mg \, \omega r \, .$$

È interessante notare che la potenza istantanea richiesta al motore è costante, anche se viene distribuita continuamente in maniera diversa fra i due rulli.

---

## PROBLEMA n. 3 — Cilindro in un tubo

100 Punti

**Quesito n. 1.**

Si indichi con $\ell_0$ la lunghezza di ciascuno dei tratti estremi occupati dal gas, quando il tubo è in poszione orizzontale:

$$\ell_0 = \frac{L - \ell}{2} = 5.00 \, \mathrm{cm} \, .$$

Siano allora $p_0$ e $V_0 = A \, \ell_0$ rispettivamente la pressione e il volume di una delle due masse d'azoto contenute nel tubo. Se il tubo è posto verticalmente, applicando la legge di Boyle e considerando la pressione esercitata dal cilindro, valgono le relazioni:

$$\begin{aligned} p_1 \, A \, (\ell_0 - \Delta\ell) &= p_0 \, A \, \ell_0 \\ p_2 \, A \, (\ell_0 + \Delta\ell) &= p_0 \, A \, \ell_0 \\ p_1 \, A &= p_2 \, A + \delta \, g \, \ell \, A \, , \end{aligned}$$

avendo indicato con $p_1$ e $p_2$ rispettivamente la pressione della massa d'azoto posta in basso e di quella posta in alto, e con $\delta$ la densità del cilindro. Risolvendo il sistema nelle tre incognite $p_0$, $p_1$, $p_2$, si ottiene:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\delta \, g \, \ell}{2} \, \frac{\ell_0 + \Delta\ell}{\Delta\ell} \\ p_2 &= \frac{\delta \, g \, \ell}{2} \, \frac{\ell_0 - \Delta\ell}{\Delta\ell} \\ p_0 &= \frac{\delta \, g \, \ell}{2} \left( \frac{\ell_0}{\Delta\ell} - \frac{\Delta\ell}{\ell_0} \right) . \end{aligned}$$

Sostituendo i valori numerici si ricava:

$$p_0 = 4.71 \times 10^3 \, \mathrm{Pa} \, .$$

**Quesito n. 2.**

La spostamento del tubo avviene rapidamente e pertanto la compressione di una massa d'azoto e la relativa espansione dell'altra possono essere considerate come processi adiabatici.

Il lavoro fornito dall'esterno sarà tutto trasformato in energia interna dell'azoto e, considerando che il processo avviene adiabaticamente, applicando il I principio della termodinamica, espresso nella forma $\mathcal{Q} + \mathcal{L} = \Delta U$ (*), si ricava:

$$\mathcal{L} = \Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 \,,$$

dove $\Delta U_1$ e $\Delta U_2$ indicano la variazione dell'energia interna dalle due masse d'azoto, durante il processo. Ma

$$\Delta U = n\, C_V\, \Delta T = \frac{C_V}{R}\,(p_\mathrm{f}\, V_\mathrm{f} - p_\mathrm{i}\, V_\mathrm{i}) = \frac{p_\mathrm{f}\, V_\mathrm{f} - p_\mathrm{i}\, V_\mathrm{i}}{\gamma - 1}$$

e considerando che in un'adiabatica si ha

$$p_\mathrm{f}\, V_\mathrm{f}^\gamma = p_\mathrm{i}\, V_\mathrm{i}^\gamma \qquad \Rightarrow \qquad \frac{p_\mathrm{f}}{p_\mathrm{i}} = \left(\frac{V_\mathrm{i}}{V_\mathrm{f}}\right)^\gamma$$

si ottiene

$$\Delta U = \frac{p_\mathrm{i}\, V_\mathrm{i}}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{V_\mathrm{i}}{V_\mathrm{f}}\right)^{\gamma-1} - 1\right]$$

con $\gamma = 7/5$ per un gas biatomico. Quindi

$$\mathcal{L} = \Delta U_1 + \Delta U_2 = \frac{p_0\, V_0}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\gamma-1} - 1\right] + \frac{p_0\, V_0}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{V_0}{V_2}\right)^{\gamma-1} - 1\right].$$

Con i dati del testo si ha:

$$\frac{V_0}{V_1} = 2 \quad \frac{V_0}{V_2} = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad p_0\, V_0 = 1.88\,\mathrm{J}$$

da cui, sostituendo nell'espressione di $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = \frac{p_0\, V_0}{\gamma - 1}\left[2^{\gamma-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{\gamma-1} - 2\right] = 0.42\, p_0\, V_0 = 0.80\,\mathrm{J}\,.$$

**Quesito n. 3.**

Il cilindro viene messo in movimento dalla forza esercitata su di esso a causa della differenza di pressione delle due masse d'azoto.

Essendo

$$\frac{p_1}{p_0} = 2^\gamma$$

$$\frac{p_2}{p_0} = \left(\frac{2}{3}\right)^\gamma$$

si ottiene

$$a_0 = \frac{F}{m} = \frac{(p_1 - p_2)\ A}{\delta\, A\, \ell} = \frac{[2^\gamma - (2/3)^\gamma]\ p_0}{\delta\, \ell}\,.$$

Con i valori delle grandezze determinati precedentemente, si ottiene

$$a_0 = 15.2\,\mathrm{m\,s^{-2}}\,.$$

(*) Si considerano quindi positivi, per convenzione, sia il calore fornito che il lavoro fatto sul gas.

**Quesito n. 4.**

Quando il cilindro passa per la posizione di equilibrio iniziale le pressioni delle due masse d'azoto sono uguali e la forza risultante agente su di esso è nulla, mentre è positiva nel tratto precedente e negativa in quello successivo. Di conseguenza in questa posizione il cilindro ha la massima velocità.

Tale velocità si può determinare dal bilancio energetico, considerando che in posizione di equilibrio la variazione d'energia interna delle due masse d'azoto è nulla e quindi tutto il lavoro compiuto sul sistema si ritrova sotto forma di energia cinetica del cilindro:

$$\frac{1}{2}\, m\, v_{\max}^2 = \mathcal{L} \qquad \Rightarrow \qquad v_{\max} = \sqrt{\frac{2\,\mathcal{L}}{\delta\, A\, \ell}} = 0.55\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,.$$

---

## PROBLEMA n. 4 — Condensatore con lamina dielettrica

100 Punti

**Quesito n. 1.**

Il condensatore può essere visto come il parallelo di due condensatori aventi rispettivamente capacità

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{ax}{d} \quad C_2 = \varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r} \frac{a(a-x)}{d} \quad \Rightarrow \quad C = C_1 + C_2 = \varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}\frac{a^2}{d} - \varepsilon_0(\varepsilon_\mathrm{r}-1)\frac{ax}{d}$$

Ne segue che

$$C = C_0(1-\alpha x) \quad \text{con} \quad C_0 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r} a^2}{d} \quad \alpha = \varepsilon_0(\varepsilon_\mathrm{r}-1)\frac{a}{d}\frac{d}{\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r} a^2} = \frac{(\varepsilon_\mathrm{r}-1)}{\varepsilon_\mathrm{r} a}$$

**Quesito n. 2.**

La carica sul condensatore vale $Q(x) = C(x)\,V$ e l'energia erogata è dunque

$$U_\mathrm{g} = C(x)\,V^2 = C_0(1-\alpha x_0)V^2$$

doppia di quella immagazzinata dal condensatore (come noto l'altra metà va dissipata per effetto Joule, qualunque sia il valore di $R$ e quindi anche nel caso di $R$ trascurabile!).

**Quesito n. 3.**

La variazione di capacità ($\Delta C = -\alpha C_0\,\Delta x$) determina una variazione (in diminuzione) della carica sul condensatore

$$\Delta Q = -\alpha C_0\, V\,\Delta x$$

e dell'energia del condensatore (a $V$ costante)

$$\Delta U_\mathrm{c} = \frac{1}{2}\,\Delta C\, V^2 = -\frac{1}{2}\,\alpha\, C_0\, V^2\,\Delta x$$

Tuttavia l'energia assorbita dal generatore

$$\Delta U_\mathrm{g} = \Delta Q\, V = -\alpha\, C_0\, V^2\,\Delta x$$

è doppia di quella ceduta dal condensatore; occorre dunque un lavoro da parte di una forza esterna per avere un corretto bilancio energetico:

$$\Delta U_\mathrm{c} = \Delta U_\mathrm{g} + L = 0 \quad \Rightarrow \quad L = \Delta U_\mathrm{c} - \Delta U_\mathrm{g} = \frac{1}{2}\alpha\, C_0\, V^2\,\Delta x$$

La potenza della forza esterna è quindi

$$W = \frac{L}{\Delta t} = \frac{1}{2}\alpha\, C_0\, V^2\,\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1}{2}\alpha\, C_0\, V^2\, v$$

**Quesito n. 4.**

Nel tempo $\Delta t$ dello spostamento si ha comunque una corrente $i = \Delta Q/\Delta t$ che per effetto Joule dissipa energia. La potenza è data da

$$W_\mathrm{J} = Ri^2 = R\frac{\Delta Q^2}{\Delta t^2} = R\,\alpha^2\,C_0^2\,V^2\,v^2$$

essendo $v = \Delta x/\Delta t$.

La condizione è che tale potenza sia molto minore di quella della forza esterna e dunque che sia

$$R\,\alpha^2\,C_0^2\,V^2 v^2 \ll \frac{1}{2}\alpha\,C_0\,V^2\,v \quad \Rightarrow \quad v \ll \frac{1}{2R\,\alpha C_0}$$

**Quesito n. 5.**

Con il dielettrico inserito ($x = 0$) l'energia di carica sarebbe stata

$$U'_\mathrm{g} = C_0\,V^2 > U_\mathrm{g}$$

ma nella fase di estrazione il generatore assorbe energia (in modulo $\Delta U = C_0\,\alpha\,V^2 x_0$) e quindi, in definitiva l'energia erogata risulta uguale. Il lavoro della forza esterna compensa la differenza di effetto Joule nei due casi, poiché nel modo B l'energia dissipata (sempre pari a $U'_\mathrm{g}/2$) è maggiore che nel caso A.

**Quesito n. 6.**

Se per muovere la lastrina a velocità costante occorre una forza $F$, vuol dire che le forze del campo determinano sulla lastrina una forza uguale ed opposta che tende a farla rientrare all'interno del condensatore. Il modulo della forza si determina facilmente dal rapporto tra potenza (trovata sopra) e velocità e dunque

$$F = \frac{W}{v} = \frac{1}{2}\alpha\,C_0\,V^2$$

La forza ha modulo costante (non dipende da $x$) e dunque il moto è inizialmente uniformemente accelerato con accelerazione $F/m$ fin quando la lastrina occupa tutto il volume del condensatore, nel tempo $\Delta t$

$$\frac{a}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{F}{m}\,(\Delta t)^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \sqrt{\frac{2ma}{C_0\alpha\,V^2}}$$

Il moto è quindi uniformemente ritardato finché la lastrina esce di un tratto $a/2$ dalla parte opposta; il moto poi si inverte e la lastrina torna in posizione iniziale. Il periodo è ovviamente $4\Delta t$.

$$T = 4\Delta t = \frac{4}{V}\sqrt{\frac{2ma}{C_0\alpha}} = \frac{4\,ad}{V}\sqrt{\frac{2\delta}{\varepsilon_0\,(\varepsilon_\mathrm{r} - 1)}}$$

Nell'ultima espressione si è posto $m = \delta\,a^2 d$ e si sono esplicitate le espressioni di $C_0$ e $\alpha$.

---

*Materiale prodotto dal Gruppo*

PROGETTO OLIMPIADI

c/o Liceo Scientifico "G. Bruno"

Via Baglioni 26, 30173 Venezia Mestre

Fax: 041–5841272